

6 点で分岐する複素射影直線の 4 重被覆の周期積分

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
中野竜之介 (NAKANO Ryunosuke) *

概要

複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ の $(n+3)$ 点配置空間 X_n は, 許容列と呼ばれるパラメーター $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3} \in (\mathbb{Q} \cap (0, 1))^{n+3}$ ($n \in \mathbb{Z}_{>}$) を指定することで, n 次元複素超球 $\mathbb{B}_n$ の稠密開集合を $\mathbb{B}_n$ の解析自己同型群の離散部分群 $\Gamma(\mu)$ で割った空間と同型になることが知られている. 本講演では, $n = 3$, $\mu = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 3/4)$ の場合に, この同型写像のある代数曲線族の周期と 3 次元複素超球 $\mathbb{B}_3$ の 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ への埋め込みによるテータ関数のひき戻しを用いた構成を紹介する.

1 導入

Definition 1.1. パラメーター $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3} \in (\mathbb{Q} \cap (0, 1))^{n+3}$ ($n \in \mathbb{Z}_{>}$) が条件

$$(1 - \mu_j - \mu_k)^{-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \text{ for } \forall j \neq k$$

を満たすとき, パラメーター μ を許容列であるという.

Proposition 1.2. 許容列の数は $n \geq 6$ の場合は存在せず, $n = 4, 5$ の場合は唯一存在し, $n = 3$ の場合は 7 通り, $n = 2$ の場合は 27 通り存在する.

Definition 1.3. 差集合 $(\mathbb{P}^1)^{n+3} - \text{Diag}$ ($\text{Diag} = \{(x_j) \in (\mathbb{P}^1)^{n+3} \mid x_j = x_k \text{ for some } j \neq k\}$) の射影一般線形群 $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ の剰余として定まる複素多様体

$$X_n = \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \setminus ((\mathbb{P}^1)^{n+3} - \text{Diag}),$$

を, 相異なる複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ の $(n+3)$ 点配置空間と呼ぶ.

Definition 1.4. 階数 $(m+1)$ の, 1 個の未知変数 u と m 個の独立変数 $x_1, \dots, x_m$ の線形微分方程式系

$$\left\{ \left(a + \sum_{j=1}^m D_j \right) (b_j + D_j) - \left(c + \sum_{j=1}^n D_j \right) (1 + D_j) \frac{1}{x_j} \right\} u = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

を Appell-Lauricella 超幾何微分方程式系 $E_D(a, b_1, \dots, b_m, c; x)$ と呼ぶ. ただし, $D_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ とする.

* E-mail: nakano.ryunosuke.i3@elms.hokudai.ac.jp

Proposition 1.5. [Yos97, Chapter 6] 許容列 $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3}$ を 1 つ指定する. $\mu_1, \dots, \mu_{n+3}$ の共通公分母を d とする. 配置空間 X_n の点 $x = (x_1, \dots, x_{n+3}) \in X_n$ に対して定まる曲線

$$C(x): w^d = \prod_{j=1}^{n+3} (z - x_j)^{d\mu_j}$$

を考える. 3 点 $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ をそれぞれ $0, 1, \infty$ に正規化することにより, $(n+1)$ 個の $C(x)$ の周期

$$u_k(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \prod_{j=1}^{n+3} (z - x_j)^{-\mu_j} dz \quad (k = 1, \dots, n+1)$$

は n 変数, 階数 $(n+1)$ の Appell-Lauricella 超幾何微分方程式系 $E_D(1 - \mu_{n+2}, \mu_1, \dots, \mu_n, 2 - \mu_{n+1} - \mu_{n+2}; x_1, \dots, x_n)$ の線形独立な解を与えている. また, これらの周期を並べて定まる局所一価正則ベクトル値関数 $(u_1, \dots, u_{n+1})$ は配置空間全体に解析接続でき, その像の射影化は, 符号が $(n+, 1-)$ となるようなある Hermite 行列 H に対して定まる n 次元複素超球 $\mathbb{B}_n(\mu) = \left\{ \xi = {}^t[\xi_0, \dots, \xi_n] \in \mathbb{P}^n \mid {}^t\xi A \bar{\xi} < 0 \right\}$ の稠密開集合 $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)$ となっている. 更に, この多価ベクトル値関数のモノドロミー群の射影化を $\Gamma(\mu)$ とするとき, $\Gamma(\mu)$ は $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)$ に不連続に作用することから商空間もまた複素多様体となり, $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)/\Gamma(\mu)$ は配置空間 X_n と複素多様体として同型になる.

本講演では, $n = 5$ の場合の唯一である許容列 $(\frac{1}{4})^8$ を制限して得られる $n = 3$ の場合の許容列 $\mu = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ の場合について, 6 点配置空間 X_3 と同型な複素多様体 X を用い, X から 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ に埋め込まれた 3 次元複素超球 $\mathbb{B}_3(\mu)$ への周期写像を定義し, その逆写像の明示的な構成を紹介する.

2 準備

Definition 2.1. 複素多様体 X を, 両側剰余

$$X = M^* \backslash X_0 / (\mathbb{C}^*)^6,$$

として定義する. ただし, M^* は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の部分群で, $(1, 2)$ -成分が 0 であるもの全体とし, X_0 は

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{41} & y_{51} & 0 \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} & y_{42} & y_{52} & 1 \end{pmatrix}$$

という形をした複素 2×6 行列で, 任意の 2×2 小行列式が 0 でないもの全体とする.

複素多様体 X と配置空間 X_3 は次のような形の完全代表系をそれぞれ持つ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \neq 0, 1, x_j \neq x_k \text{ for } j \neq k \right\}.$$

このことから, X と X_3 はどちらも $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq 0, 1, x_j \neq x_k \text{ for } j \neq k\}$ と複素多様体として同型であることがわかる.

Proposition 2.2. 配置 $x = (x_1, \dots, x_5, \infty) \in X$ に対して定まる代数曲線 $C(x)$ は, 6 点 $P_j = [1 : x_j : 0]$ ($j = 1, \dots, 5$), $P_\infty = [0 : 0 : 1]$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の 4 重被覆である. また, $C(x)$ は種数 6 の閉 Riemann 面である.

Definition 2.3. 被覆変換 $\rho: C(x) \rightarrow C(x)$ を, 変換 $\rho(z, w) = (z, iw)$ から定まるものとする. これにより ρ^2 はそれぞれ整係数 1 次ホモロジー群 $H_1(C(x), \mathbb{Z})$ の間と X 上の正則 1-形式の成す複素ベクトル空間 $H^0(C(x), \Omega^1)$ の間に線形変換 ρ^2 を定める. これらの (-1) -固有空間をそれぞれ $H_1(C(x), \mathbb{Z})^-$, $H^0(C(x), \Omega^1)^-$ と表す.

配置 x を $(0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty)$ に正規化し, 条件

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \quad (2.1)$$

を満たすと仮定するとき, 次を構成した:

- $H^0(C(x), \Omega^1)^-$ の基底 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_4)$,
- $H_1(C(x), \mathbb{Z})^-$ の元 $\Sigma = \{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\}$ で張られる index 4 の格子 $L(x)$ で, 交点行列 Q と ρ の表現行列 M_ρ がそれぞれ

$$Q = \begin{pmatrix} O_4 & -2I_4 \\ 2I_4 & O_4 \end{pmatrix}, \quad M_\rho = \begin{pmatrix} O_4 & -U \\ U & O_4 \end{pmatrix},$$

となるもの. ただし, I_4 は 4 次単位行列であり, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_2$ である.

こうして $L(x)$ のシンプレクティック基底 Σ と正則微分の基底 ϕ から定まる周期行列を $\Pi = {}^t(\tau_A, \tau_B)$ とし, $\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k\right)$, $\tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k\right)$ をそれぞれ A 周期, B 周期と呼ぶ. B 周期が単位行列になるように正規化された微分形式 $\varphi = \phi \tau_B^{-1}$ に関する周期行列の A 周期を $\tau (= \tau_A \tau_B^{-1})$ とする.

Proposition 2.4. 周期行列 Π は Riemann の双線型関係式を満たす. 即ち,

$${}^t\Pi Q \Pi = O_4, \quad i {}^t\Pi Q \bar{\Pi} > 0$$

を満たす. 特に, 正規化された周期行列 τ は 4 次 Siegel 上半空間

$$\mathfrak{S}_4 = \{\sigma \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \mid {}^t\sigma = \sigma, \mathrm{Im}(\sigma) > 0\}$$

の元である. ただし, $\mathrm{Im}(\sigma) > 0$ とは行列 σ の虚部が正定値であることを意味する.

また, τ は次のような表示を持つ:

Proposition 2.5. B 周期を $\tau_B = (v_1, \dots, v_4)$ と表すとき, 正規化された周期行列 τ は

$$\tau = iU \left(I_4 - \frac{2}{{}^t v_1 U v_1} v_1 {}^t v_1 U \right)$$

と表される. 更に, ${}^t v_1 U v_j = 0$ ($j = 2, 3, 4$), $v_1^* U v_1 < 0$ を満たす.

このことから, 次のような写像を定める:

Proposition 2.6. 複素ベクトル $v \neq 0$ に対し,

$$\iota(v) = iU \left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v} v {}^t v U \right)$$

とする. このとき, v が複素超球 $\mathbb{B}_3^U = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^* U \xi < 0\}$ の元であることと, $\iota(v)$ が 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ の元であることは同値である.

こうして埋め込み $\iota: \mathbb{B}_3^U \rightarrow \mathfrak{S}_4$ が定まる.

Definition 2.7. 一般の配置 $y \in X$ に対し, 条件 (2.1) を満たす配置 $x = (0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty) \in X$ を基点に取り $L(x)$ のシンプレクティック基底と微分形式の基底を解析接続したものをそれぞれ $\Sigma = \{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ とする. このとき, Proposition 2.6 から $\left(\int_{B_j} \varphi_1\right)_{j=1,2,3,4} \in \mathbb{B}_3^U$ であった. $p: X \rightarrow \mathbb{B}_3^U$ を, $p(y) = \left(\int_{B_j} \varphi_1\right)_{j=1,2,3,4} \in \mathbb{B}_3^U$ で定める. この写像を周期写像と呼ぶ.

埋め込み ι は, $\mathbb{B}_3^U$ の自己同型群 $U(U, \mathbb{C}) = \{g \in \text{GL}(4, \mathbb{C}) \mid g^* U g = U\}$ の, $\mathfrak{S}_4$ の自己同型群 $\text{Sp}(4, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(8, \mathbb{R}) \mid M Q {}^t M = Q\}$ への埋め込み $j: U(U, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Sp}(4, \mathbb{R})$ を誘導する. この埋め込みにより周期写像 p のモノドロミー群 $\Gamma(\mu)$ は $\text{Sp}(4, \mathbb{Q})$ へ埋め込まれる. その像を $\Gamma'(\mu)$ と表す. 配置 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \infty)$ の 2 点 x_j, x_k ($1 \leq j < k \leq 5$) のみを置換した配置 x' への経路を取り解析接続することにより, $L(x)$ から $L(x')$ への線形写像 $N(j, k) \in U(U, \mathbb{Q}[i])$ が得られる. 構成から, モノドロミー群 $\Gamma(\mu)$ は $N(j, k)^2$ 達で生成される.

3 周期写像の逆写像の構成

この節では, Abel–Jacobi–Prym 写像を導入し, Riemann テータ関数の Abel–Jacobi–Prym 写像による引き戻しを調べることにより周期写像 $p: X \rightarrow (\mathbb{B}_3^U)^\circ / \Gamma(\mu)$ の逆写像を構成する.

Definition 3.1. 点 $x \in X$ を取り, $\tau = \iota(x)$ とする. Abel–Jacobi–Prym 写像 $\psi: C(x) \rightarrow J(C(x)) = \mathbb{C}^4 / (\mathbb{Z}^4 \tau + \mathbb{Z}^4)$ を,

$$\psi(P) = \left(\int_{\rho^2(P)}^P \varphi_1, \dots, \int_{\rho^2(P)}^P \varphi_4 \right)$$

と定める. ただし, 積分路は P_∞ から P への経路を取り, $1 - \rho^2$ を作用させたものとする.

積分路の取り方から次がわかる:

Proposition 3.2. 各分岐点 P_j の ψ による像は次のようになる:

$$\begin{aligned} \psi(P_0) &\equiv \psi(P_{x_1}) \equiv \frac{1}{2}(0, 1, 0, 0)\tau + \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0), \\ \psi(P_{x_2}) &\equiv \psi(P_{x_3}) \equiv \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1)\tau + \frac{1}{2}(1, 0, 1, 1), \\ \psi(P_1) &\equiv \psi(P_\infty) \equiv (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Definition 3.3. 指標 $a, b \in \mathbb{Z}^4$ に対し, 指標付き Riemann テータ関数を, $\mathbb{C}^4 \times \mathfrak{S}_4$ 上の正則関数

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\zeta, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2}a \right) \tau \right)^t \left(m + \frac{1}{2}a \right) + \left(m + \frac{1}{2}a \right)^t \left(\zeta + \frac{1}{2}b \right) \right)$$

として定める. ただし, $\mathbf{e}(t) = \exp(2\pi i t)$ である. また, テータ定数を,

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0, \tau)$$

と定める.

Proposition 3.4. Abel–Jacobi–Prym 写像 $\psi: C(x) \rightarrow J(C(x))$ によるテータ関数の引き戻し $\psi^* \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\zeta, \tau)$ が恒等的に零でないようなテータ関数に対し、関数 $\psi^* \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ の零点の個数は重複度を込めて 8 点である.

Remark 3.5. 関数 $\psi^* \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\zeta, \tau)$ は $C(x)$ 上一価ではないが、零点とその位数は変化しないため well-defined である.

Definition 3.6. 指標 $m_j = (a_j : b_j)$ を次のように定める:

$$m_0 = (0000 : 0000), \quad m_1 = (1000 : 0100), \quad m_2 = (0100 : 1000), \quad m_3 = (1111 : 1111).$$

また、関数 $\vartheta_j(\zeta, \tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}(\zeta, \tau)$, $F_j(P) = \psi^* \vartheta(P)$ ($j = 0, \dots, 11$) とし、 $C(x)$ 上の関数 $R_{jk}(P) = F_j(P)/F_k(P)$, テータ定数 $\vartheta_j(\tau) = \vartheta_j(0, \tau)$ を定める.

Remark 3.7. 関数 $R_{jk}(P) = F_j(P)/F_k(P)$ の分子と分母は一価ではないが、Abel–Jacobi–Prym 写像の多価性により係数に exp factor が現れ、分子分母でこれらが打ち消し合うため一価となる.

Proposition 3.8. $C(x)$ 上の関数 R_{01}, R_{23} は $P = (z, w) \in C(x)$ に関する有理型関数であり、各 $(j, k) = (0, 1), (2, 3)$ に対し、

$$R_{jk}(P) = C \frac{z - s}{z - t},$$

となる定数 $s, t \in \mathbb{C}$ と $C \neq 0$ が存在する. 特に、

$$R_{01}(P_0) = \frac{\vartheta_1(\tau)}{\vartheta_0(\tau)}, \quad R_{23}(P_{x_2}) = -\frac{\vartheta_3(\tau)}{\vartheta_2(\tau)}$$

が成立.

こうして次の主張を得る:

Proposition 3.9. 配置 $x = (0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty)$ と、 $\tau = \iota \circ p(x)$ に関するテータ定数に関して次が成立:

$$\frac{(\vartheta_0(\tau)^2 + \vartheta_1(\tau))^2}{4\vartheta_0(\tau)^2\vartheta_1(\tau)^2} = \frac{1}{x_1}, \quad \frac{(\vartheta_2(\tau)^2 + \vartheta_3(\tau))^2}{4\vartheta_2(\tau)^2\vartheta_3(\tau)^2} = \frac{1 - x_3}{x_2 - x_3}.$$

このテータ定数達に、それぞれ x_1 と x_2, x_1 と x_3 の置換を意味する行列

$$N'(2, 3) = I_2 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -(1+i) & 1+i \end{pmatrix}, \quad N'(2, 4) = I_2 \oplus \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix},$$

の $j: U(U, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ による像のテータ定数への作用を決定することにより x_2, x_3 の表示が得られる. $j(N'(2, 3)), j(N'(2, 4))$ は有理係数シンプレクティック群の元であるため作用の決定は一般に困難であるが、[MMN07, Lemma 5] と、 $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ のテータ関数への作用 [Igu72, p.85, p.176, p.182, Theorem 3] を用いることにより決定することができる. こうして次を得る:

Proposition 3.10. 指標 $m_4, \dots, m_{11}$ を、

$$m_4 = (0010 : 0001), \quad m_5 = (1010 : 0101), \quad m_6 = (0110 : 1001), \quad m_7 = (1101 : 1110), \\ m_8 = (0011 : 0000), \quad m_9 = (1011 : 0100), \quad m_{10} = (0111 : 1000), \quad m_{11} = (1100 : 1111),$$

と定め, $\vartheta_j(\tau) = \vartheta_{m_j}(0, \tau)$ とするとき, 次が成立:

$$\begin{aligned} \frac{(\vartheta_4(\tau)^2 + \vartheta_5(\tau))^2}{4\vartheta_4(\tau)^2\vartheta_5(\tau)^2} &= \frac{1}{x_2}, & \frac{(\vartheta_6(\tau)^2 + \vartheta_7(\tau))^2}{4\vartheta_6(\tau)^2\vartheta_7(\tau)^2} &= -\frac{1-x_3}{x_1-x_3}, \\ \frac{(\vartheta_8(\tau)^2 + \vartheta_9(\tau))^2}{4\vartheta_8(\tau)^2\vartheta_9(\tau)^2} &= \frac{1}{x_3}, & \frac{(\vartheta_{10}(\tau)^2 + \vartheta_{11}(\tau))^2}{4\vartheta_{10}(\tau)^2\vartheta_{11}(\tau)^2} &= \frac{1-x_1}{x_2-x_1}. \end{aligned}$$

以上により与えられた配置に対し, そこから定まる 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ の点によって元の配置が復元された. こうして次の主定理が得られる:

Theorem 3.11. $j = 1, 2, 3$ に対し, 複素超球 $\mathbb{B}_3^U$ 上の正則関数

$$\frac{4\vartheta_{4j-4}(\iota(s))^2\vartheta_{4j-3}(\iota(s))^2}{(\vartheta_{4j-4}(\iota(s))^2 + \vartheta_{4j-3}(\iota(s)))^2}, \quad s \in \mathbb{B}_3^U$$

を考える. 点 $[v] \in (\mathbb{B}_3^U)^\circ/\Gamma$ に対し, 上で定めた正則関数の $s = v$ での値としてそれぞれ y_1, y_2, y_3 を定める. このとき, 配置 $y = (0, y_1, y_2, y_3, 1, \infty) \in X$ は, $p(y) = [v]$ 満たす.

4 今後の展望

[KM09] によって次のことが示されている:

Fact 4.1. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ を,

$$\begin{aligned} (a_0, b_0, c_0, d_0) &= (a, b, c, d) \quad (a \geq b \geq c \geq d \geq 0), \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \frac{\sqrt{(a_n + d_n)(b_n + c_n)}}{2}, \\ c_{n+1} &= \frac{\sqrt{(a_n + c_n)(b_n + d_n)}}{2}, & d_{n+1} &= \frac{\sqrt{(a_n + b_n)(c_n + d_n)}}{2}, \end{aligned}$$

によって定める. このとき, この 4 つの数列は共通の極限 $\mu(a, b, c, d)$ を持つ. この極限を Matsumoto AGM^{*1}と呼ぶ. 更に, $0 < x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$ に対し, Matsumoto AGM $\mu(1, x_1, x_2, x_3)$ は 3 変数の Lauricella F_D を用いて次のように表示される:

$$\frac{1}{\mu(1, x_1, x_2, x_3)} = F_D \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1-x_1^2, 1-x_2^2, 1-x_3^2 \right)^2.$$

ただし, n 変数の Lauricella F_D とは, パラメータ $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma$ と変数 $x_1, \dots, x_n$ に対して定まる関数

$$F_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n \geq 0} \frac{(\alpha, \sum_{j=1}^n m_j) \prod_{j=1}^n (\beta_j, m_j)}{(\gamma, \sum_{j=1}^n m_j) \prod_{j=1}^n (1, n_j)} \prod_{j=1}^n z_j^{m_j},$$

である. ここで, 複素数 α と非負整数 n に対し, $(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$, $(\alpha, 0) = 1$ とする.

^{*1} Arithmetic-geometric mean, 算術幾何平均

楕円曲線の場合に, Gauss AGM はテータ関数・Gauss の超幾何級数と周期写像を通して結びつくことはよく知られた事実である. また, [Bor76], [MT12] において Borchardt AGM もまた適切な代数曲線・代数曲面の上で定義されるテータ関数・超幾何関数が周期写像を通して結びつくことが知られている. Matsumoto AGM の場合にも同様の対応があるのではないかと予想しているため, 今後は Thomae 型の公式や, 適切な形をしたテータ関数の 2 倍角公式を導くことを目的とする.

References

- [Bor76] C. W. Borchardt. “Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.” *Berl. Monatsber* **53** (1876), 611–621.
- [Igu72] J. Igusa. “Theta Functions.” Berlin, Heidelberg, and New York: Springer-Verlag, 1972.
- [KM09] T. Kato and K. Matsumoto. “The common limit of a quadruple sequence and the hypergeometric function F_D of three variables.” *Nagoya Math. J.* **195** (2009), 113–124.
- [MMN07] K. Matsumoto, T. Minowa, and R. Nishimura. “Automorphic forms on the 5-dimensional complex ball with respect to the Picard modular group over $\mathbb{Z}[i]$.” *Hokkaido Math. J.* **36** (2007), 143–173.
- [MT12] K. Matsumoto and T. Terasoma. “Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **2012.669** (2012), 121–149.
- [Yos97] M. Yoshida. “Hypergeometric functions, my love.” **E32**. Aspects of Mathematics. Modular interpretations of configuration spaces. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.